Chapitre 12 : Algorithmes d’approximation

Problème d’optimisation :

Etant donné , on veut renvoyer tel que qui minimise/maximise .

Pb à seuil : NP-complet.

**Définition**

On dit que renvoie une approximation au problème de minimisation associé à

et si :

**Définition**

Pour un problème de maximisation, on a 2 définitions qui existent :

**Exemple 1** : Min Vertex Cover

Soit non orienté.

On veut trouver de taille minimale tel que .

**Définition**

Une image contenant ligne, cercle

Description générée automatiquementDans un graphe , un couplage est un ensemble tel que

Figure : exemple de couplage

Un couplage est dit maximal s’il est impossible de lui ajouter

Une image contenant ligne

Description générée automatiquementune arête en préservant le fait que c’est un couplage.

Figure : {0;1} forme un couplage maximal

**Proposition**

Dans , les extrémités des arêtes d’un couplage maximal forment une couverture par sommets.

Démo

Si ce n’est pas le cas, alors il existe tel que ni ni n’est impliqué dans le couplage qui n’est pas maximal car on pourrait y rajouter .

**Proposition**

Si admet un couplage de taille alors toute couverture par sommets de est de taille au moins .

Démo

Pour chaque arête du couplage, il faut au moins un sommet pour la recouvrir et chaque tel sommet ne pourra recouvrir qu’une seule arête du couplage. Dans la couverture, on a donc au moins un sommet de plus pour chaque arête du couplage et donc au moins sommets dans la couverture.

**Conclusion**

Pour obtenir un couplage maximal, il suffit de prendre une arête quelconque, de la mettre dans le couplage et tant qu’il reste au moins une arête compatible avec le couplage, on l’y ajoute.

**Exemple 2**

Algo :

# Trier ti par valeurs décroissantes

S ← 0

pour i allant de 1 à n :

si ti + S ≤ C :

S ← S + ti

renvoyer S

Cet algo fournit une approximation.

Preuve :

Montrons que la somme renvoyée est

…

**Exemple 3 : Couplage de poids maximal**

Etant donné un graphe pondéré à poids positifs, on veut déterminer un couplage qui maximise .

Algo :

# Trier les arêtes par poids décroissant

C ← ∅

pour chaque arête dans le sens trié :

si C ∪ {a} est un couplage :

C ← C ∪ {a}

Renvoyer C

Fournit une approximation.

Preuve :

Soit un couplage de poids max et le couplage renvoyé par l’algo.

Objectif = Montrer que :

Soit . Il existe une arête telle que .

(on peut par exemple avoir si )

En effet, pour :

* Soit et on peut poser
* Soit , ce qui signifie qu’au moment où on considère dans l’algo, contenait déjà une arête d’extrémité ou d’extrémité et on choisit l’une de ces arêtes pour .

On remarque que :

Car soit , soit est considérée avant dans la boucle de l’algo qui est dans le sens décroissant des poids.

D’où :

Il reste à montrer que :

Car correspond à une somme de certaines arêtes de , chacune pouvant apparaître entre et fois et les poids sont .

Il reste finalement à montrer que :



a deux extrémités et on ne peut pas avoir plus de deux arêtes de ayant chacune d’elle pour extrémité.